Concours blanc MPSI

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Problème 1 : Analyse

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie au début de la partie B. La partie E étudie une suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à partir de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie A – Résultats préliminaires

Les questions de cette partie sont indépendantes et permettent d'établir des résultats susceptibles d'être utilisés dans la suite du problème.

1) Donner les valeurs exactes de $\operatorname{ch}(\ln 3)$ et $\operatorname{sh}(\ln 3)$ sous forme de nombres rationnels (mis sous forme irréductible).

$$\operatorname{ch}(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3+\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{10}{3}}{2} = \frac{5}{3}$$
$$\operatorname{sh}(\ln 3) = \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{2} = \frac{3-\frac{1}{3}}{2} = \frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{4}{3}$$

2) On rappelle la définition de la fonction tangente hyperbolique : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{th}(x) = \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$.
Exprimer la dérivée de th uniquement avec la fonction ch, en justifiant le résultat.

th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{th}'(x) = \frac{\operatorname{sh}'(x)\operatorname{ch}(x) - \operatorname{ch}'(x)\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)^2} = \frac{\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$$

3) Soit k un réel positif ou nul. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction

$$f_k : x \mapsto \frac{1}{1+kx^2}$$

- Si $k = 0$, on a $f_0 : x \to 1$ donc une primitive est donnée par $x \mapsto x$.
- Si $k > 0$, alors une primitive de f_k est donnée, pour tout réel x, par

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \frac{1}{1+kt^2}dt \qquad u = \sqrt{k}t \qquad du = \sqrt{k}dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^{\sqrt{k}x} \frac{1}{1+u^2}du \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} [\arctan u]_0^{\sqrt{k}x} = \frac{1}{\sqrt{k}} \arctan(\sqrt{k}x) \end{aligned}$$

La fonction $F : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{k}} \arctan(\sqrt{k}x)$ convient.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $(1+x)^n \geq 1+nx$

Si $n=0$, le résultat est évident car $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$. Si $n \geq 1$, d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(1+x)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k 1^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \\ &= 1+nx+\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k\end{aligned}$$

et comme $x \geq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geq 0$. D'où $(1+x)^n \geq 1+nx$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ le problème de Cauchy : $\begin{cases} y' + n\mathrm{th}(t)y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

L'intervalle de définition est $\mathbb{R}$.
On considère l'équation (homogène) $y' + n\mathrm{th}(t)y = 0$. Les solutions sont

$$y(t) = Ce^{-n\ln(\mathrm{ch}(t))} = C\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right)^n \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

(car $n\mathrm{th} = n\dfrac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}} = n\dfrac{\mathrm{ch}'}{\mathrm{ch}}$ a pour primitive $t \mapsto n\ln(\mathrm{ch}(t))$ sur $\mathbb{R}$).
Ainsi, y est solution du problème de Cauchy si et seulement si $y(0)=1$. Or,

$$y(0) = Ce^{-n\ln(\mathrm{ch}(0))} = Ce^{-n\ln 1} = Ce^{-0} = C$$

Finalement l'unique solution du problème de Cauchy est

$$y : t \mapsto \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(t)}\right)^n$$

6) Déterminer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction th.

On a

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)}$$

$$\frac{1}{\mathrm{ch}x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = \frac{1}{1-X} \qquad \text{avec } X = -\frac{x^2}{2}+o(x^3)$$

On a bien $X \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et par ailleurs

$$\frac{1}{1-X} \underset{X\to 0}{=} 1+X+o(X)$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{ch}x} &\underset{x\to 0}{=} 1+\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right)+o\left(-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\end{aligned}$$

si bien que

$$\begin{aligned}
\operatorname{th}(x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x+\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{2}+o(x^3)+\frac{x^3}{6}\\
&\underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{3}+o(x^3)
\end{aligned}$$

Partie B – Introduction de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \int_0^{\ln 3}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^n dx$$

7) Justifier que le terme général u_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$, et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

Comme ch est strictement positive sur $\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^n$ est définie sur $[0,\ln 3]$. De plus, cette fonction est continue par quotient de telles fonctions. Donc son intégrale sur $[0,\ln 3]$ est bien définie.

Comme $\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch}x}\right)^n \geq 0$ sur $[0,\ln 3]$, on en déduit que $u_n\geq 0$.

8) Calculer u_0 et u_2.

$$u_0=\int_0^{\ln 3}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^0 dx=\int_0^{\ln 3}1dx=\ln 3$$

$$\begin{aligned}
u_2 &= \int_0^{\ln 3}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^2 dx\\
&= [\operatorname{th}x]_0^{\ln 3} && \text{par la question 2}\\
&= \operatorname{th}(\ln 3)-0\\
&= \frac{\operatorname{sh}(\ln 3)}{\operatorname{ch}(\ln 3)}\\
&= \frac{\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}}=\frac{4}{5} && \text{par la question 1}
\end{aligned}$$

9) Calculer u_1.

$$\begin{aligned}
u_1 &= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{2}{e^x + \frac{1}{e^x}} dx \qquad\qquad u = e^x \qquad\qquad du = e^x dx \\
&= \int_1^3 \frac{2}{u + \frac{1}{u}} \frac{du}{u} \\
&= 2\int_1^3 \frac{1}{u^2+1} du \\
&= 2\left[\arctan(u)\right]_1^3 \\
&= 2\arctan(3) - 2\arctan(1) \\
&= 2\arctan(3) - \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Partie C – Sens de variation et convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

10) Établir que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone.

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \int_0^{\ln 3} \left[\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n}\right] dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - 1\right] dx
\end{aligned}$$

Étudions le signe de $\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - 1\right]$ pour $x \in [0, \ln 3]$. On a vu que $\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n} \geq 0$ sur cet intervalle. Ensuite, comme $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, on a

$$\frac{1}{\mathrm{ch} x} \leq 1 \qquad \text{donc} \qquad \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - 1 \leq 0$$

On en déduit que $\left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n} \left[\frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - 1\right] \leq 0$ sur $[0, \ln 3]$. Ainsi,

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

D'où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

11) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite finie, qu'on notera ℓ. Donner un encadrement de ℓ.

Par la question **10)**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. De plus, par la question **7)**, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0. On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.

De plus, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on a $u_n \leq u_0$. Ainsi,

$$0 \leq u_n \leq u_0 = \ln 3$$

et en passant à la limite, on trouve

$$0 \leq \ell \leq \ln 3$$

12) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = \frac{4 \times 3^n}{(n+1)5^{n+1}} + \frac{n}{n+1} u_n$$

On pourra procéder par intégration par parties.

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= \int_0^{\ln 3} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n+2} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \mathrm{th}'(x) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n dx \\
&= \left[\mathrm{th}(x) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n\right]_0^{\ln 3} - \int_0^{\ln 3} \mathrm{th}(x)(-n)\mathrm{sh}(x) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^{n+1} dx \\
&= \mathrm{th}(\ln 3) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(\ln 3)}\right)^n - 0 + n \int_0^{\ln 3} \left(\frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)}\right) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n dx \\
&= \frac{4}{5} \left(\frac{1}{\frac{5}{3}}\right)^n + n \int_0^{\ln 3} \left(\frac{\mathrm{ch}^2(x) - 1}{\mathrm{ch}^2(x)}\right) \left(\frac{1}{\mathrm{ch}(x)}\right)^n dx \\
&= \frac{4}{5} \times \frac{3^n}{5^n} + n u_n - n u_{n+2}
\end{aligned}$$

D'où

$$(n+1)u_{n+2} = 4 \times \frac{3^n}{5^{n+1}} + n u_n$$

On obtient donc

$$\boxed{u_{n+2} = \frac{4 \times 3^n}{(n+1)5^{n+1}} + \frac{n}{n+1} u_n}$$

Partie D – Calcul de la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$

13) Prouver que : $\forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{ch}(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = \mathrm{ch}(x) - \left(1 + \dfrac{x^2}{2}\right)$. Montrons que g est positive sur $\mathbb{R}$. g est de classe C^∞ par somme de telles fonctions et

$$g'(x) = \mathrm{sh}(x) - x$$

$$g''(x) = \mathrm{ch}(x) - 1 \geq 0$$

En particulier, la fonction g est convexe. Sa courbe est donc au-dessus de sa tangente en 0. Or, cette tangente a pour équation

$$y = g'(0)(x - 0) + g(0) = 0x + 0 = 0$$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $g(x) \geq 0$.

(On aurait pu également dresser le tableau de variations de g et conclure)

14) En déduire que pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}^n(x) \geq 1 + n\frac{x^2}{2}$$

Par la question précédente, on a

$$\mathrm{ch}(x) \geq 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^n$ est croissante, donc

$$\mathrm{ch}^n(x) \geq \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n$$

Enfin, par la question 4, comme $\frac{x^2}{2} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\mathrm{ch}^n(x) \geq \left(1 + \frac{x^2}{2}\right)^n \geq 1 + n\frac{x^2}{2}$$

15) Par ce qui précède, déterminer une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $0 \leq u_n \leq \alpha_n$. On devra préciser le terme général α_n.

On a vu en question **7)** que la suite (u_n) est positive, donc $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, par la question précédente, pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} \leq \frac{1}{1 + n\frac{x^2}{2}}$$

d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} dx \\ &\leq \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1 + n\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{1 + kx^2} dx \qquad \text{avec } k := \frac{n}{2} \end{aligned}$$

On suppose $n \in \mathbb{N}^*$. Alors par la question 3,

$$\begin{aligned} u_n &\leq \left[\frac{1}{\sqrt{k}} \arctan\left(\sqrt{k}x\right)\right]_0^{\ln 3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{n}{2}}} \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \ln 3\right) - 0 \end{aligned}$$

Finalement, si on pose

$$\boxed{\alpha_n := \sqrt{\frac{2}{n}} \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \ln 3\right)}$$

on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\boxed{0 \leq u_n \leq \alpha_n}$$

16) En déduire que $\ell = 0$.

Par la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leq u_n \leq \alpha_n$$

On en déduit que

$$0 \leq \alpha_n = \sqrt{\frac{2}{n}} \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{2}} \ln 3\right) \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{\pi}{2} \to 0$$

Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\alpha_n \to 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est encadrée par deux suites qui tendent vers zéro. Donc, de même, $u_n \to 0$. D'où $\boxed{\ell = 0}$

Partie E – Étude d'une série alternée

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k u_k \qquad \text{et} \qquad v_n = \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\operatorname{ch}^{n-1}(x)\,(1+\operatorname{ch}(x))} dx$$

17) Soit $q \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k$.

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k q^k = \sum_{k=0}^{n} (-q)^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = -1 \\ \dfrac{1-(-q)^{n+1}}{1+q} & \text{si } q \neq -1 \end{cases}$$

18) Soit $x \in [0, \ln 3]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch}^k(x)}$.

Par ce qui précède, si on pose $q = \dfrac{1}{\operatorname{ch}(x)}$, alors $q \neq -1$ et donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\operatorname{ch}^k(x)} &= \frac{1-\left(-\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{\operatorname{ch}(x)}} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^{n+1}x - (-1)^{n+1}}{\operatorname{ch}^{n+1}x + \operatorname{ch}^n x} \\ &= \frac{\operatorname{ch}^{n+1}x + (-1)^n}{\operatorname{ch}^n x\,(1+\operatorname{ch} x)} \end{aligned}$$

19) Exprimer I_n en fonction de v_{n+1} et de v_0.

On a

$$\begin{aligned}
I_n &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{\mathrm{ch}^k(x)} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}^{n+1}x + (-1)^n}{\mathrm{ch}^n x\,(1+\mathrm{ch}x)} dx \qquad \text{par la question } \mathbf{19)} \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}x}{1+\mathrm{ch}x} dx + \int_0^{\ln 3} \frac{(-1)^n}{\mathrm{ch}^n x\,(1+\mathrm{ch}x)} dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^{0-1}(x)\,(1+\mathrm{ch}x)} dx + (-1)^n \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^{n+1-1}x\,(1+\mathrm{ch}x)} dx \\
&= v_0 + (-1)^n v_{n+1}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{I_n = v_0 + (-1)^n v_{n+1}}$$

20) Montrer que pour tout entier naturel n : $\quad 0 \leq v_n \leq u_n$.
En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leq \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x)(1+\mathrm{ch}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x) + \mathrm{ch}^n(x)} \leq \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)}$$

car $\mathrm{ch}^{n-1}(x) \geq 0$. Ainsi, en intégrant de 0 à $\ln 3$, on trouve

$$\int_0^{\ln 3} 0 dx \leq \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^{n-1}(x)(1+\mathrm{ch}(x))} dx \leq \int_0^{\ln 3} \frac{1}{\mathrm{ch}^n(x)} dx$$

c'est-à-dire

$$\boxed{0 \leq v_n \leq u_n}$$

Or, par la question **16)**, on sait que $u_n \to 0$, donc par le théorème d'encadrement, $\boxed{v_n \to 0}$.

21) Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $\dfrac{X^2+1}{X(X+1)^2}$

(La fraction est de degré strictement négatif : la partie entière est nulle. De plus, le dénominateur est déjà factorisé sur $\mathbb{R}$)

- AU BROUILLON :
$$\frac{X^2+1}{X(X+1)^2} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1} + \frac{c}{(X+1)^2}$$
On trouve facilement $c = \dfrac{(-1)^2+1}{-1} = -2$, puis $a = \dfrac{0^2+1}{(0+1)^2} = 1$, et enfin $a+b=1$ donc $b=0$

Diverses méthodes de calcul permettent d'obtenir

$$\boxed{\frac{X^2+1}{X(X+1)^2} = \frac{1}{X} - \frac{2}{(X+1)^2}}$$

22) Calculer v_0 à l'aide du changement de variable $u = e^x$.

$$\begin{aligned}
v_0 &= \int_0^{\ln 3} \frac{\mathrm{ch}x}{1+\mathrm{ch}x}dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{2\mathrm{ch}x}{2+2\mathrm{ch}x}dx \\
&= \int_0^{\ln 3} \frac{e^x+e^{-x}}{2+e^x+e^{-x}}dx \qquad u = e^x \qquad du = e^x dx \\
&= \int_1^3 \frac{u+\frac{1}{u}}{2+u+\frac{1}{u}}\frac{du}{u} \\
&= \int_1^3 \frac{u^2+1}{u(2u+u^2+1)}du \\
&= \int_1^3 \frac{u^2+1}{u(u+1)^2}du \\
&= \int_1^3 \left(\frac{1}{u} - \frac{2}{(1+u)^2}\right) du \qquad \text{par la question } \textbf{20)} \\
&= \left[\ln|u| + 2\frac{1}{1+u}\right]_1^3 \\
&= \ln(3) + \frac{2}{4} - \frac{2}{2}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{v_0 = \ln(3) - \frac{1}{2}}$$

23) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Par la question **19)**, on a

$$I_n = v_0 + (-1)^n v_{n+1}$$

Or, par la question **20)**, on a $v_n \to 0$. Ainsi, I_n tend vers v_0. Par ce qui précède, on a donc

$$\boxed{I_n \to \ln(3) - \frac{1}{2}}$$

Problème 2 : Algèbre, matrices magiques

On appelle matrice **semi-magique** de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ toute matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,3]\!]}$ dont les coefficients vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a_{11} + a_{12} + a_{13} &= a_{21} + a_{22} + a_{23} = a_{31} + a_{32} + a_{33} \\ &= a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} \end{aligned}$$

On note $\mathbb{S}$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $\sigma(A)$ la valeur commune à ces six sommes.

On définit les matrices J, K et L par

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Généralités

a) Interpréter les six sommes sur les coefficients qui apparaissent dans la définition de $\mathbb{S}$.

Si $A \in \mathbb{S}$, les six sommes représentent la somme des coefficients de chaque colonne et de chaque ligne de A.

b) Vérifier brièvement que les matrices J, K et L sont des matrices semi-magiques.

Pour la matrice J, les six sommes sont égales à $1 + 1 + 1 = 3$. Donc $J \in \mathbb{S}$.
Pour la matrice K, les six sommes sont égales à $1 + (-1) + 0 = 0$. Donc $K \in \mathbb{S}$. De même pour L, donc $L \in \mathbb{S}$.

c) Montrer que si A et B sont deux matrices semi-magiques, alors pour tous réels λ, μ la matrice $\lambda A + \mu B$ est semi-magique, et

$$\sigma(\lambda A + \mu B) = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B)$$

Soit $A, B \in \mathbb{S}$. On pose c_{ij} le coefficient d'indice (i, j) de $\lambda A + \mu B$. Alors

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{12} + c_{13} &= (\lambda a_{11} + \mu b_{11}) + (\lambda a_{12} + \mu b_{12}) + (\lambda a_{13} + \mu b_{13}) \\ &= \lambda\,(a_{11} + a_{12} + a_{13}) + \mu\,(b_{11} + b_{12} + b_{13}) \\ &= \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B) \end{aligned}$$

et on montre de même que les cinq autres sommes sont toutes égales à $\lambda\sigma(A)+\mu\sigma(B)$. Ainsi, $\lambda A+\mu B \in \mathbb{S}$ et $\sigma(\lambda A + B) = \lambda\sigma(A) + \mu\sigma(B)$.

2) Étude de $\mathbb{S}$

a) Montrer que $\mathbb{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Par la question 1.b), on a $J \in \mathbb{S}$ donc $\mathbb{S}$ est non vide.

Soit $A, B \in \mathbb{S}$. Par la question 1.c), avec $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, on a $A - B \in \mathbb{S}$. Donc $\mathbb{S}$ est un sous-groupe de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer AJ et JA. Montrer que

$$A \in \mathbb{S} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad AJ = JA = \lambda J \qquad (*)$$

De plus, montrer que lorsque cette équivalence est vérifiée, alors $\lambda = \sigma(A)$.

On a

$$AJ = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} & a_{11}+a_{12}+a_{13} \\ a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} & a_{21}+a_{22}+a_{23} \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} & a_{31}+a_{32}+a_{33} \end{pmatrix}$$

$$JA = \begin{pmatrix} a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \\ a_{11}+a_{21}+a_{31} & a_{12}+a_{22}+a_{32} & a_{13}+a_{23}+a_{33} \end{pmatrix}$$

Sens direct : si $A \in \mathbb{S}$, alors par hypothèse, $AJ = \sigma(A)J$ et de même $JA = \sigma(A)J$.

Sens réciproque : s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AJ = JA = \lambda J$, alors

$$AJ = \lambda J \implies \begin{cases} a_{11}+a_{12}+a_{13} = \lambda \\ a_{21}+a_{22}+a_{13} = \lambda \\ a_{31}+a_{32}+a_{33} = \lambda \end{cases}$$

$$JA = \lambda J \implies \begin{cases} a_{11}+a_{21}+a_{31} = \lambda \\ a_{12}+a_{22}+a_{32} = \lambda \\ a_{13}+a_{23}+a_{33} = \lambda \end{cases}$$

Ainsi, la somme des coefficients de chaque ligne et chaque colonne de A vaut λ. On en déduit que $A \in \mathbb{S}$ avec $\lambda = \sigma(A)$.

c) En déduire que pour toutes matrices semi-magiques A et B, la matrice AB est semi-magique et $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.

Soit $A, B \in \mathbb{S}$. Par la question précédente,

$$(AB)J = A(BJ) = A\sigma(B)J = \sigma(B)AJ = \sigma(B)\sigma(A)J$$

$$J(AB) = (JA)B = \sigma(A)JB = \sigma(A)\sigma(B)J = \sigma(B)\sigma(A)J$$

Ainsi, $ABJ = JAB = \lambda J$ avec $\lambda = \sigma(A)\sigma(B)$. On en déduit que $AB \in \mathbb{S}$ avec $\sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B)$.

d) En déduire que $\mathbb{S}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

La matrice identité I_3 est bien dans $\mathbb{S}$ avec $\sigma(I_3) = 1 + 0 + 0 = 1$.

Soit $A, B \in \mathbb{S}$. Alors par la question 2.a), on a $A - B \in \mathbb{S}$ et par la question 2.c), on a $AB \in \mathbb{S}$. Ainsi, $\mathbb{S}$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

e) Soit $A \in \mathbb{S} \cap GL_n(\mathbb{R})$. Montrer à l'aide de $(*)$ que $\sigma(A) \neq 0$, que $A^{-1} \in \mathbb{S}$ et déterminer $\sigma(A^{-1})$ en fonction de $\sigma(A)$.

Comme $A \in \mathbb{S}$, on a

$$AJ = JA = \sigma(A)J$$

Supposons par l'absurde que $\sigma(A) = 0$. Alors $AJ = 0$. En multipliant à gauche par A^{-1}, on en déduit que $J = 0$. Contradiction. Donc $\sigma(A) \neq 0$.

Ensuite, on remarque que

$$AJ = \sigma(A)J \implies J = \sigma(A)JA^{-1} \implies JA^{-1} = \frac{1}{\sigma(A)}J$$

$$JA = \sigma(A)J \implies J = \sigma(A)A^{-1}J \implies A^{-1}J = \frac{1}{\sigma(A)}J$$

Ainsi, A^{-1} vérifie $*$ avec $\lambda = \dfrac{1}{\sigma(A)}$. On en déduit que $A^{-1} \in \mathbb{S}$ avec $\sigma(A^{-1}) = \dfrac{1}{\sigma(A)}$.

f) Réciproquement, soit $A \in \mathbb{S}$ telle que $\sigma(A)$ est non nul. Peut-on conclure que A est inversible ?

Non. D'une part, on a vu que $J \in \mathbb{S}$ avec $\sigma(J) = 3 \neq 0$. D'autre part, J n'est pas inversible : si c'était le cas, alors comme $J \in \mathbb{S}$, on a

$$JJ = \sigma(J)J \implies J = \sigma(J)I_3 = 3I_3$$

ce qui est contradictoire. Donc J n'est pas inversible. Finalement, on ne peut pas conclure qu'une matrice $A \in \mathbb{S}$ telle que $\sigma(A) \neq 0$ soit inversible.

On appelle **matrice magique** de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ toute matrice $A = (a_{ij})_{i,j\in[\![1,3]\!]}$ qui est semi-magique et dont les coefficients vérifient les égalités supplémentaires suivantes :

$$\sigma(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} = a_{13} + a_{22} + a_{31}$$

On note $\mathbb{M}$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On vérifie aisément que les résultats trouvés aux questions 1.b) et 1.c) se généralisent aux matrices magiques et on pourra utiliser ces résultats dans la suite.

3) Etude de $\mathbb{M}$

a) Interpréter les deux sommes supplémentaires qui apparaissent dans la définition de $\mathbb{M}$.

b) Montrer que $\mathbb{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Est-ce un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$?

La matrice J est dans $\mathbb{M}$, donc $\mathbb{M} \neq \varnothing$.

Soit $A, B \in \mathbb{M}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors par la question 1.c), on a $\lambda A + \mu B \in \mathbb{M}$, donc $\mathbb{M}$ est un s.e.v. de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{M}$ est un sous-anneau de $\mathbb{M}$. Alors $I_3 \in \mathbb{M}$. En particulier, les sommes des diagonales sont égales :

$$1 + 1 + 1 = 0 + 1 + 0$$

ce qui est contradictoire. D'où le résultat.

c) Montrer que pour tout $A \in \mathbb{M}$, on a

$$\sigma(A) = 3a_{22} \qquad (**)$$

Comme $A \in \mathbb{M}$, on a

$$\begin{cases} a_{11} + a_{22} + a_{33} = \sigma(A) \\ a_{12} + a_{22} + a_{32} = \sigma(A) \\ a_{13} + a_{22} + a_{31} = \sigma(A) \end{cases}$$

En sommant ces trois lignes on obtient

$$\underbrace{a_{11} + a_{12} + a_{13}}_{\sigma(A)} + 3a_{22} + \underbrace{a_{33} + a_{32} + a_{31}}_{\sigma(A)} = 3\sigma(A)$$

Ainsi,

$$3a_{22} = \sigma(A)$$

d) Montrer que si $A \in \mathbb{M}$, alors $A^\top \in \mathbb{M}$.

On suppose $A \in \mathbb{M}$. Montrons que $A^\top \in \mathbb{M}$.

- La somme des coefficients de la ligne i de $A^\top$ correspond à la somme des coefficients de la colonne i de A, donc vaut $\sigma(A)$.
- La somme des coefficients de la colonne i de $A^\top$ correspond à la somme des coefficients de la ligne i de A, donc vaut $\sigma(A)$.

- La somme des coefficients d'une diagonale de $A^\top$ correspond à la somme des coefficients de cette même diagonale pour A, donc vaut $\sigma(A)$

Finalement, $A^\top \in \mathbb{M}$.

e) On note $\mathrm{Sym}(\mathbb{M})$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathbb{M}$. En utilisant $(**)$, montrer que $\mathrm{Sym}(\mathbb{M}) = \mathrm{Vect}(J, K)$.

On procède par double inclusion. Inclusion réciproque : soit $A \in \mathrm{Vect}(J, K)$. Alors il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$A = \lambda J + \mu K$$

Or, on a vu que $J, K \in \mathbb{M}$. Comme $\mathbb{M}$ est un s.e.v. par la question 3.b), on en déduit que $A \in \mathbb{M}$. Enfin,

$$A^\top = \lambda J^\top + \mu K^\top = \lambda J + \mu K = A$$

donc A est symétrique. Finalement, $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{M})$. On a donc $\mathrm{Vect}(J, K) \subset \mathrm{Sym}(\mathbb{M})$.

Inclusion directe : soit $A \in \mathrm{Sym}(\mathbb{M})$. Comme A est symétrique, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Par $(**)$, on a $3d = \sigma(A)$. Alors, comme $A \in \mathbb{M}$,

$$\begin{cases} a+b+c = 3d \\ b+d+e = 3d \\ c+e+f = 3d \\ \\ a+d+f = 3d \\ c+d+c = 3d \end{cases} \quad \begin{cases} a+b+c-3d = 0 \\ b-2d+e = 0 \\ c-3d+e+f = 0 \\ \\ a-2d+f = 0 \\ 2c-2d = 0 \end{cases}$$

La résolution de ce système conduit à

$$\begin{cases} a = e \\ b = f \\ c = -\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f \\ d = -\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f \end{cases}$$

et donc

$$A = \begin{pmatrix} e & f & -\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f \\ f & -\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f & e \\ -\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f & e & f \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f\right) J + \left(\frac{1}{2}e - \frac{1}{2}f\right) K$$

On voit en particulier que $A \in \mathrm{Vect}(J, K)$. D'où, par arbitraire sur A, on a $\mathrm{Sym}(\mathbb{M}) \subset \mathrm{Vect}(J, K)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Sym}(\mathbb{M}) = \mathrm{Vect}(J, K)}$$

f) On note Asym($\mathbb{M}$) l'ensemble des matrices magiques antisymétriques. Déterminer Asym($\mathbb{M}$).

Déterminons Asym($\mathbb{M}$) par analyse-synthèse.

Analyse : soit $A \in \mathrm{Asym}(\mathbb{M})$. Comme A est antisymétrique, elle est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

On constate en particulier que $a_{22} = 0$ donc $\sigma(A) = 0$ par la question 3.c). Ainsi,

$$\begin{cases} a+b=0 \\ -a+c=0 \\ -b-c=0 \end{cases} \quad \begin{cases} a=-b \\ a=c \\ b=-c \end{cases}$$

si bien que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & -a \\ -a & 0 & a \\ a & -a & 0 \end{pmatrix} = aL$$

Synthèse : soit $a \in \mathbb{R}$ et $A = aL$. Alors comme $L \in \mathbb{M}$ et que $\mathbb{M}$ est un s.e.v., on a $A \in \mathbb{M}$. De plus A est antisymétrique. Ainsi,

$$\boxed{\mathrm{Asym}(\mathbb{M}) = \{aL \mid a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(L)}$$

g) Montrer que toute matrice magique s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice magique symétrique et d'une matrice magique antisymétrique.

Montrons l'unicité : soit $M \in \mathbb{M}$ telle que

$$M = A_1 + S_1 = A_2 + S_2$$

avec $A_1, A_2 \in \mathrm{Asym}(\mathbb{M})$ et $S_1, S_2 \in \mathrm{Sym}(\mathbb{M})$. Alors,

$$\underbrace{A_1 - A_2}_{\in A_n(\mathbb{R})} = \underbrace{S_2 - S_1}_{\in S_n(\mathbb{R})}$$

Ainsi, la matrice $C = A_1 - A_2$ est symétrique et antisymétrique, de sorte que $C = C^\top = -C^\top$. Donc $C^\top = 0$, ou encore $C = 0$. On en déduit que $A_1 = A_2$ et par suite $S_2 = S_1$. Finalement, la décomposition est unique.

Montrons l'existence. Soit $M \in \mathbb{M}$. On pose

$$S = \frac{M + M^\top}{2} \qquad A = \frac{M - M^\top}{2}$$

On vérifie facilement que $M = S + A$, que S est symétrique et que A est antisymétrique. De plus, par la question 3.d), on a $M^\top \in \mathbb{M}$. Or, comme $\mathbb{M}$ est un s.e.v., on en déduit que $S \in \mathbb{M}$ et $A \in \mathbb{M}$. Finalement,

$$M = S + A \qquad \text{avec } S \in \mathrm{Sym}(\mathbb{M}) \text{ et } A \in \mathrm{Asym}(\mathbb{M})$$

On a donc montré l'existence et l'unicité d'une telle décomposition.

h) En déduire que $\mathbb{M} = \{\alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$.

On procède par double inclusion. Pour l'inclusion réciproque, soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que

$$M = \alpha J + \beta K + \gamma L \qquad \text{avec} \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Comme $J, K, L \in \mathbb{M}$ et que $\mathbb{M}$ est un s.e.v., on en déduit que $M \in \mathbb{M}$.

Pour l'inclusion directe, soit $M \in \mathbb{M}$. Alors par la question précédente, il existe $S \in \mathrm{Sym}(\mathbb{M})$ et $A \in \mathrm{Asym}(\mathbb{M})$ telles que

$$M = S + A$$

Or, par les questions 3)e) et 3)f), on a $S \in \mathrm{Vect}(J, K)$ et $A \in \mathrm{Vect}(L)$. Ainsi, $M \in \{\alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}$. D'où l'inclusion recherchée. Finalement,

$$\boxed{\mathbb{M} = \{\alpha J + \beta K + \gamma L \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\}}$$